

第一章 集合与函数概念

一：集合的含义与表示

1、集合的含义：集合为一些确定的、不同的东西的全体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定的东西是否属于这个整体。

把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫集合，简称为集。

2、集合的中元素的三个特性：

(1) 元素的确定性：集合确定，则一元素是否属于这个集合是确定的：属于或不属于。

(2) 元素的互异性：一个给定集合中的元素是唯一的，不可重复的。

(3) 元素的无序性：集合中元素的位置是可以改变的，并且改变位置不影响集合

3、集合的表示： $\{\dots\}$

(1) 用大写字母表示集合： $A=\{\text{我校的篮球队员}\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$

(2) 集合的表示方法：列举法与描述法。

a、列举法：将集合中的元素一一列举出来 $\{a,b,c,\dots\}$

b、描述法：

①区间法：将集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合。

$\{x \in \mathbb{R} \mid x-3 > 2\}$, $\{x \mid x-3 > 2\}$

②语言描述法：例： $\{\text{不是直角三角形的三角形}\}$

③Venn图：画出一条封闭的曲线，曲线里面表示集合。

4、集合的分类：

(1) 有限集：含有有限个元素的集合

(2) 无限集：含有无限个元素的集合

(3) 空集：不含任何元素的集合

5、元素与集合的关系：

(1) 元素在集合里，则元素属于集合，即： $a \in A$

(2) 元素不在集合里，则元素不属于集合，即： $a \notin A$

◆ 注意：常用数集及其记法：

非负整数集（即自然数集） 记作： \mathbb{N}

正整数集 \mathbb{N}^* 或 \mathbb{N}^+

整数集 \mathbb{Z}

有理数集 \mathbb{Q}

实数集 \mathbb{R}

6、集合间的基本关系

(1) . “包含”关系 (1) 一子集

定义：如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，我们说这两个集合有包含

关系，称集合 A 是集合 B 的子集。记作： $A \subseteq B$ （或 $B \supseteq A$ ）

注意： $A \subseteq B$ 有两种可能（1）A 是 B 的一部分；

（2）A 与 B 是同一集合。

反之：集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A，记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$

（2）.“包含”关系（2）—真子集

如果集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素 $x \in B$ 且 $x \notin A$ ，则集合 A 是集合 B 的真子集

如果 $A \subseteq B$ ，且 $A \neq B$ 那就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ （或 $B \supsetneq A$ ）读作 A 真含与 B

（3）.“相等”关系： $A=B$

“元素相同则两集合相等”

如果 $A \subseteq B$ 同时 $B \subseteq A$ 那么 $A=B$

（4）. 不含任何元素的集合叫做空集，记为 Φ

规定：空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集。

（5）集合的性质



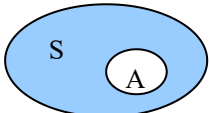
① 任何一个集合是它本身的子集。 $A \subseteq A$

② 如果 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ ，那么 $A \subseteq C$

③ 如果 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$ ，那么 $A \subsetneq C$

④ 有 n 个元素的集合，含有 2^n 个子集， 2^{n-1} 个真子集

7、集合的运算

运算类型	交集	并集	补集
定义	由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的交集。记作 $A \cap B$ （读作‘A 交 B’），即 $A \cap B = \{x x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$ 。	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的并集。记作： $A \cup B$ （读作‘A 并 B’），即 $A \cup B = \{x x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$ 。	全集：一般，若一个集合汉语我们所研究问题中这几道的所有元素，我们就称这个集合为全集，记作：U 设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集）记作 $C_S A$ ， $C_S A = \{x x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$
韦恩图示	 图 1	 图 2	

性 质	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	$(C_u A) \cap (C_u B) = C_u (A \cup B)$
	$A \cap \Phi = \Phi$	$A \cup \Phi = A$	$(C_u A) \cup (C_u B) = C_u (A \cap B)$
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup (C_u A) = U$
	$A \cap B \subseteq A$	$A \cup B \supseteq A$	$A \cap (C_u A) = \Phi$
	$B \subseteq B$	$A \cup B \supseteq B$	

二、函数的概念

- 函数的概念：设 A 、 B 是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数。记作： $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。

(1) 其中， x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；

(2) 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的值域。

- 函数的三要素：定义域、值域、对应法则

- 函数的表示方法：(1) 解析法：明确函数的定义域

(2) 图想像：确定函数图像是否连线，函数的图像可以是连续的曲线、直线、折线、离散的点等等。

(3) 列表法：选取的自变量要有代表性，可以反应定义域的特征。

- 函数图象知识归纳

(1) 定义：在平面直角坐标系中，以函数 $y=f(x)$ ， $(x \in A)$ 中的 x 为横坐标，函数值 y 为纵坐标的点 $P(x, y)$ 的集合 C ，叫做函数 $y=f(x)$ ， $(x \in A)$ 的图象。 C 上每一点的坐标 (x, y) 均满足函数关系 $y=f(x)$ ，反过来，以满足 $y=f(x)$ 的每一组有序实数对 x, y 为坐标的点 (x, y) ，均在 C 上。

- 画法

A、描点法： B、图象变换法：平移变换；伸缩变换；对称变换，即平移。

- 函数图像平移变换的特点：

1) 加左减右——————只对 x

- 2) 上减下加——————只对 y
- 3) 函数 $y=f(x)$ 关于 X 轴对称得函数 $y=-f(x)$
- 4) 函数 $y=f(x)$ 关于 Y 轴对称得函数 $y=f(-x)$
- 5) 函数 $y=f(x)$ 关于原点对称得函数 $y=-f(-x)$
- 6) 函数 $y=f(x)$ 将 x 轴下面图像翻到 x 轴上面去， x 轴上面图像不动得函数 $y=|f(x)|$
- 7) 函数 $y=f(x)$ 先作 $x \geq 0$ 的图像，然后作关于 y 轴对称的图像得函数 $f(|x|)$

三、函数的基本性质

1、函数解析式子的求法

(1)、函数的解析式是函数的一种表示方法，要求两个变量之间的函数关系时，一是要求出它们之间的对应法则，二是要求出函数的定义域.

(2)、求函数的解析式的主要方法有：

- 1) 代入法：
- 2) 待定系数法：
- 3) 换元法：
- 4) 拼凑法：

2. 定义域：能使函数式有意义的实数 x 的集合称为函数的定义域。

求函数的定义域时列不等式组的主要依据是：

- (1) 分式的分母不等于零；
- (2) 偶次方根的被开方数不小于零；
- (3) 对数式的真数必须大于零；
- (4) 指数、对数式的底必须大于零且不等于 1.
- (5) 如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的. 那么，它的定义域是使各部分都有意义的 x 的值组成的集合.
- (6) 指数为零底不可以等于零，
- (7) 实际问题中的函数的定义域还要保证实际问题有意义.

3、相同函数的判断方法：①表达式相同（与表示自变量和函数值的字母无关）；
②定义域一致（两点必须同时具备）

4、区间的概念：

- (1) 区间的分类：开区间、闭区间、半开半闭区间
- (2) 无穷区间
- (3) 区间的数轴表示

5、值域（先考虑其定义域）

- (1) 观察法：直接观察函数的图像或函数的解析式来求函数的值域；
- (2) 反表示法：针对分式的类型，把 Y 关于 X 的函数关系式化成 X 关于 Y

的函数关系式，由 X 的范围类似求 Y 的范围。

(3) 配方法：针对二次函数的类型，根据二次函数图像的性质来确定函数的值域，注意定义域的范围。

(4) 代换法（换元法）：作变量代换，针对根式的题型，转化成二次函数的类型。

6. 分段函数

(1) 在定义域的不同部分上有不同的解析表达式的函数。

(2) 各部分的自变量的取值情况。

(3) 分段函数的定义域是各段定义域的交集，值域是各段值域的并集。

(4) 常用的分段函数有取整函数、符号函数、含绝对值的函数

7. 映射

一般地，设 A 、 B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则 f ，使对于集合 A 中的任意一个元素 x ，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射。记作“ f （对应关系）： A （原象） $\rightarrow B$ （象）”

对于映射 $f: A \rightarrow B$ 来说，则应满足：

(1) 集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有象，并且象是唯一的；

(2) 集合 A 中不同的元素，在集合 B 中对应的象可以是同一个；

(3) 不要求集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原象。

注意：映射是针对自然界中的所有事物而言的，而函数仅仅是针对数字来说的。

所以函数是映射，而映射不一定是函数

8. 函数的单调性(局部性质)及最值

(1)、增减函数

(1) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ，如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数. 区间 D 称为 $y=f(x)$ 的单调增区间.

(2) 如果对于区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数. 区间 D 称为 $y=f(x)$ 的单调减区间.

注意：函数的单调性是函数的局部性质；函数的单调性还有单调不增，和单调不减两种

(2)、图象的特点

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，那么说函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，在单调区间上增函数的图象从左到右是上升的，减函数的图象从左到右是下降的.

(3)、函数单调区间与单调性的判定方法

(A) 定义法：

- ① 任取 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$;
- ② 作差 $f(x_1) - f(x_2)$;
- ③ 变形（通常是因式分解和配方）;
- ④ 定号（即判断差 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负）;
- ⑤ 下结论（指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性）.

(B) 图象法(从图象上看升降)

(C) 复合函数的单调性

复合函数：如果 $y=f(u)$ ($u \in M$), $u=g(x)$ ($x \in A$), 则 $y=f[g(x)]=F(x)$ ($x \in A$) 称为 f 、 g 的复合函数。

复合函数 $f[g(x)]$ 的单调性与构成它的函数 $u=g(x)$, $y=f(u)$ 的单调性密切相关，其规律：“同增异减”

注意：函数的单调区间只能是其定义域的子区间，不能把单调性相同的区间和在一起写成其并集。

9: 函数的奇偶性（整体性质）

(1)、偶函数

一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有 $f(-x)=f(x)$ ，那么 $f(x)$ 就叫做偶函数。

(2)、奇函数

一般地，对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x ，都有 $f(-x)=-f(x)$ ，那么 $f(x)$ 就叫做奇函数。

(3)、具有奇偶性的函数的图象的特征

偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数的图象关于原点对称。

利用定义判断函数奇偶性的步骤：

a、首先确定函数的定义域，并判断其是否关于原点对称；若是不对称，则是非奇非偶的函数；若对称，则进行下面判断；

b、确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系；

c、作出相应结论：若 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$ ，则 $f(x)$ 是偶函数；

若 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) + f(x) = 0$ ，则 $f(x)$ 是奇函数。

(4) 利用奇偶函数的四则运算以及复合函数的奇偶性

a、在公共定义域内，偶函数的加减乘除仍为偶函数；

奇函数的加减仍为奇函数；

奇数个奇函数的乘除认为奇函数；

偶数个奇函数的乘除为偶函数；

一奇一偶的乘积是奇函数；

a、复合函数的奇偶性：一个为偶就为偶，两个为奇才为奇。

注意：函数定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件。首先看函数的定义域是否关于原点对称，若不对称则函数是非奇非偶函数。若对称，

(1) 再根据定义判定；

(2) 由 $f(-x) \pm f(x) = 0$ 或 $f(x) / f(-x) = \pm 1$ 来判定；

(3) 利用定理，或借助函数的图象判定。

10、函数最值及性质的应用

(1)、函数的最值

a 利用二次函数的性质（配方法）求函数的最大（小）值

b 利用图象求函数的最大（小）值

c 利用函数单调性的判断函数的最大（小）值：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，在区间 $[b,c]$ 上单调递减则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最大值 $f(b)$ ；

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，在区间 $[b,c]$ 上单调递增则函数 $y=f(x)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$ ；

(2)、函数的奇偶性与单调性

奇函数在关于原点对称的区间上有相同的单调性；

偶函数在关于原点对称的区间上有相反的单调性。

(3)、判断含糊单调性时也可以用作商法，过程与作差法类似，区别在于作差法是与 0 作比较，作商法是与 1 作比较。

(4)、绝对值函数求最值，先分段，再通过各段的单调性，或图像求最值。

(5)、在判断函数的奇偶性时候，若已知是奇函数可以直接用 $f(0)=0$ ，但是 $f(0)=0$ 并不一定可以判断函数为奇函数。（高一阶段可以利用奇函数 $f(0)=0$ ）。

第二章 基本初等函数

一、指数函数

(一) 指数

1、 指数与指数幂的运算：

复习初中整数指数幂的运算性质：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

2、根式的概念：一般地，若 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n > 1$ ，且 $n \in N^*$ 。

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数。此时， a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示。

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数。此时正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 的次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示。正的 n 次方根与负的 n 次方根可以合并成 $\pm\sqrt[n]{a}$ ($a > 0$)。

注意：负数没有偶次方根；0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0} = 0$ 。

$$\text{当 } n \text{ 是奇数时，} \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ 当 } n \text{ 是偶数时，} \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数， a 叫做被开方数。

3、 分数指数幂

正数的分数指数幂的

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1), \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in N^*, n > 1)$$

0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

4、 有理数指数幂的运算性质

$$(1) \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (a > 0, r, s \in R);$$

$$(2) \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad (a > 0, r, s \in R);$$

$$(3) \quad (ab)^r = a^r b^r \quad (a > 0, b > 0, r \in R).$$

5、 无理数指数幂

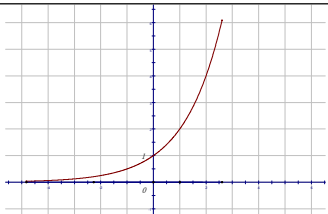
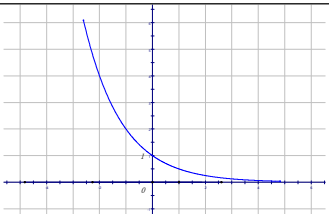
一般的，无理数指数幂 a^a ($a > 0, a$ 是无理数) 是一个确定的实数。有理数指数幂的运算性质同样使用于无理数指数幂。

(二)、 指数函数的性质及其特点

1、指数函数的概念：一般地，函数 $y = a^x$ ($a > 0, \text{且 } a \neq 1$) 叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域为 R 。

注意：指数函数的底数的取值范围，底数不能是负数、零和 1。为什么？

2、指数函数的图象和性质

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
定义域 \mathbb{R}	定义域 \mathbb{R}
值域 $y > 0$	值域 $y > 0$
在 \mathbb{R} 上单调递增	在 \mathbb{R} 上单调递减
非奇非偶函数	非奇非偶函数
函数图象都过定点 $(0, 1)$	函数图象都过定点 $(0, 1)$

注意：利用函数的单调性，结合图象还可以看出：

- (1) 在 $[a, b]$ 上，值域是 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ ；
- (2) 若 $x \neq 0$ ，则 $f(x) \neq 1$ ； $f(x)$ 取遍所有正数当且仅当 $x \in \mathbb{R}$ ；
- (3) 对于指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，总有 $f(1) = a$ ；
- (4) 当 $a > 1$ 时，若 $X_1 < X_2$ ，则有 $f(X_1) < f(X_2)$ 。

二、对数函数

(一) 对数

1. 对数的概念：一般地，如果 $a^x = N$ ($a > 0, a \neq 1$)，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，

记作： $x = \log_a N$ (a —底数， N —真数， $\log_a N$ —对数式)

说明：① 注意底数的限制 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ；

② $a^x = N \Leftrightarrow \log_a N = x$ ；

③ 注意对数的书写格式： $\log_a N$

两个重要对数：

① 常用对数：以 10 为底的对数 $\lg N$ ；

② 自然对数：以无理数 $e = 2.71828\dots$ 为底的对数的对数 $\ln N$ 。

(二) 对数的运算性质

如果 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ， $M > 0$ ， $N > 0$ ，那么：

① $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$ ；

② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ；

③ $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbb{R}$)。

注意：换底公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1; b > 0).$$

利用换底公式推导下面的结论

$$(1) \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b; \quad (2) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

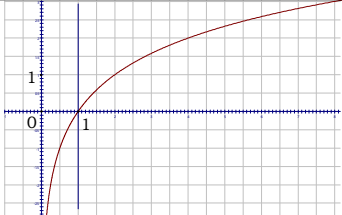

(二) 对数函数

1、对数函数的概念：函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $(0, +\infty)$ 。

注意：① 对数函数的定义与指数函数类似，都是形式定义，注意辨别。如：
 $y = 2 \log_2 x$ ， $y = \log_5 \frac{x}{5}$ 都不是对数函数，而只能称其为对数型函数。

② 对数函数对底数的限制： $(a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 。

2、对数函数的性质：

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
定义域 $x > 0$	定义域 $x > 0$
值域为 R	值域为 R
在 R 上递增	在 R 上递减
函数图象都过定点 $(1, 0)$	函数图象都过定点 $(1, 0)$

三、幂函数

1、幂函数定义：一般地，形如 $y = x^\alpha (a \in R)$ 的函数称为幂函数，其中 α 为常数。

2、幂函数性质归纳。

- (1) 所有的幂函数在 $(0, +\infty)$ 都有定义并且图象都过点 $(1, 1)$ ；
- (2) $\alpha > 0$ 时，幂函数的图象通过原点，并且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数。特别地，当 $\alpha > 1$ 时，幂函数的图象下凸；当 $0 < \alpha < 1$ 时，幂函数的图象上凸；
- (3) $\alpha < 0$ 时，幂函数的图象在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数。在第一象限内，当 x 从右边趋向原点时，图象在 y 轴右方无限地逼近 y 轴正半轴，当 x 趋于 $+\infty$ 时，图象在 x 轴上方无限地逼近 x 轴正半轴。

第三章 函数的应用

方程的根与函数的零点

- 1、函数零点的概念：对于函数 $y=f(x)$ ，把使成立的实数叫做函数的零点。
- 2、函数零点的意义：函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 实数根，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标。即：方程有实数根，函数的图象与坐标轴有交点，函数有零点。
- 3、函数零点的求法：
 - (1)（代数法）求方程 $f(x)=0$ 的实数根；
 - (2)（几何法）对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数的图象联系起来，并利用函数的性质找出零点。
- 4、二次函数的零点：
 - (1) $\Delta > 0$ ，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两不等实根，二次函数的图象与 x 轴有两个交点，二次函数有两个零点。
 - (2) $\Delta = 0$ ，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相等实根（二重根），二次函数的图象与 x 轴有一个交点，二次函数有一个二重零点或二阶零点。
 - (3) $\Delta < 0$ ，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，二次函数的图象与 x 轴无交点，二次函数无零点。